

MATEMÁTICAS 1º BACHILLERATO. EJERCICIOS

RADICALES, LOGARÍTMOS, POLINOMIOS Y FRACCIONES ALGEBRAICAS:

1. Efectúa las siguientes operaciones racionalizando previamente cada fracción

a) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1} + \frac{2+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

b) $\frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

2. Agrupa los siguientes logaritmos en productos o cocientes.

a) $\log 2 + 3\log x - \frac{1}{2}\log y$

b) $2\ln(x-y) - \ln(x^2 - y^2)$

c) $4\log a + \frac{1}{3}\log b - 2\log a^3 - \log 100$

3. Sabiendo que $\log a = 6$, y que $\log b = 2,2$ calcula los siguientes logaritmos (2 puntos)

a) $\log \sqrt{a^{-5}} + \log b^2$

b) $\log \sqrt[4]{\frac{ab}{100}}$

4. Razona si el polinomio $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 8$ es divisible entre $(x+2)$. Indica también si $x = -2$ es una raíz de dicho polinomio.

5. Calcula el polinomio de segundo grado cuyo término independiente es 7, sabiendo que $x = -1$ es una de sus raíces y que el resto de su división por $(x-2)$ es -15 . (2 puntos)

6. Efectúa y simplifica la siguiente operación de fracciones algebraicas (2 puntos):

a) $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} \right)$

b) $\frac{x+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x+2}{2} + \frac{x}{x+2} + \frac{x^3-2x^2}{2x^2-8}$

c) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+x} : \left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} \right)$

ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS:

7. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas y exponenciales

a) $\log x^3 = \log 6 + 2 \log x$

b) $\log x + \log(x + 3) = 2 \log(x + 1)$

c) $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

8. Resuelve las siguientes inecuaciones indicando claramente las soluciones en forma de intervalo:

a) $\frac{x+6}{3-x} \leq 0$

b) $x^2 - 6 \geq 3$

9. (1 punto) Calcula las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x - 4y + 3z = 9 \\ x + y - z = -1 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x - y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = 4 \\ 5x - y + 3z = 16 \end{array} \right. \quad \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + z = 4 \\ -x + 2y + z = 6 \\ y + z = 0 \end{array} \right. \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{array} \right.$$

TRIGONOMETRÍA:

10. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas indicando todas sus posibles soluciones.

a) $\text{sen} 2x + \cos x = 0$

b) $1 + \cos 2x = \cos x$

c) $\text{sen} 2x = \text{tag} x$

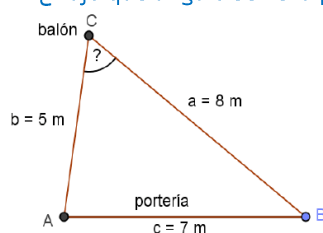
d) $\cos 2x = 1 + \text{sen} x$

e) $1 - \cos 2x = \text{sen} x$

11. Demuestra la siguiente igualdad trigonométrica:

$$\cos x + \text{sen} x \text{tg} x = \sec x$$

12. En un entrenamiento de fútbol, se coloca el balón en un punto situado a 5m y 8m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?



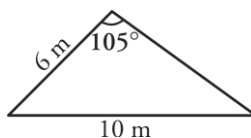
13. Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:

Sol:

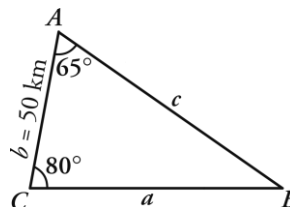
$$a = 10 \text{ m}; \hat{A} = 105^\circ$$

$$b = 6 \text{ m}; \hat{B} = 35^\circ 25' 9''$$

$$c = 6,6 \text{ m}; \hat{C} = 39^\circ 34' 51''$$



14. En dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, B. Si consideramos el triángulo de vértices A, B y C, el ángulo en A es de 65° y el ángulo en C es de 80°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?
(Sol: a 79 km de C y a 85,85 km de A)



NÚMEROS COMPLEJOS:

15. Halla el resultado de las siguientes operaciones y exprésalo en forma polar.

a) $(2 - 2i) \cdot (1 + i)^4$

b) $\sqrt[2]{((3 - 5i) + i^9)}$

16. Halla "k" de manera que operando $\frac{k+i}{1-i}$ se obtenga de resultado un número real.

17. Halla las raíces cuartas del número complejo $z = -16i$

18. Calcula todas las soluciones posibles, complejas o no, de la ecuación $x^4 + 20x^2 + 60 = 0$

GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO Y CÓNICAS:

19. Dada la base formada por los vectores $u(-2,-1)$ y $v(-2,4)$, indica justificadamente:

a) ¿forman una base ortogonal? ¿y ortonormal? Justifica por qué

b) Cuáles serían las coordenadas que tendría el vector $w(2,-6)$ en una base formada por u y v .

20. Indica la posición relativa de los siguientes pares de rectas y calcula su intersección y el ángulo que forman, cuando sea posible.

$$r : 2x - y + 3 = 0$$

$$s : x + 3 = y$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3t \\ y = 1 + 2t \end{array} \right\} r$$

a)

b) $s : 4x + 6y + 4 = 0$

21. Hallar el lugar geométrico de los puntos que están a la misma distancia de A $(-1,4)$ y B $(3, -2)$.
Halla también la medida del segmento AB

22. Averigua en cada caso, la ecuación general de la recta paralela y de la recta perpendicular a r que pasa por el punto $(1, 3)$:

- a. $r: 3x - 2y + 4 = 0$ (Sol: $3x - 2y + 3 = 0$; $2x + 3y - 11 = 0$)
 b. $r: \frac{x-2}{6} = \frac{y-4}{2}$ (Sol: $x - 3y + 8 = 0$; $3x + y - 6 = 0$)
 c. $y = -2x + 3$ (Sol: $2x + y - 5 = 0$; $x - 2y + 5 = 0$)

23. Hallar la ecuación general de las siguientes rectas (r , s y t):

- a) r: mediatriz del segmento A (-3,2) y B (5,4). (1 punto)
 b) s: recta paralela a $2x+3y+1=0$ que pase por el punto (-1,2). (1 punto)
 c) t: recta que pasa por los puntos C(3,-2) y D (1,1), y su posición relativa con respecto a la recta dada en el apartado b). (2 puntos)

24. Dados los puntos A (0,1), B(2,3) y C(-1,2), vértices del triángulo ABC:

- a) Halla la ecuación de la recta correspondiente a cada uno de los lados,
 b) Indica si los vectores AB y BC son perpendiculares
 c) Calcula el perímetro del triángulo
 d) Calcula en Área
 e) Halla la ecuación de una recta perpendicular al lado AB que pase por el punto C
 f) Halla la ecuación de la mediatriz del lado CB
 g) Halla la ecuación de la bisectriz del ángulo A
 h) Hallar la ecuación de la mediana que parte de C
 i) Indica cuánto mide el ángulo A

25. Indica la **posición relativa** de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$ con respecto a:

- a) El punto (0,-1)
 b) La recta r: $y = x - 4$
 c) La circunferencia $x^2 + y^2 - 16x - 10y + 87 = 0$

26. a) Halla la ecuación de la **elipse** centrada en el origen cuyo vértice A es (0,4) y la medida de su semieje menor es 3.

b) Halla los elementos (vértices, focos, asíntotas y excentricidad) de la **hipérbola** $8x^2 - 3y^2 = 120$

c) Halla la ecuación de la **parábola** centrada en el origen (0,0), cuya directriz es $y=2$

FUNCIONES. DOMINIO Y RECORRIDO, FUNCIÓN INVERSA, FUNCIÓN COMPUESTA

27. Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a. $y = \frac{1}{x^2 - 2x}$ (Sol: $\mathbb{R} - \{0, 2\}$)

b. $y = \sqrt{6+3x}$ (Sol: $6+3x \geq 0 \Rightarrow 3$ Dominio = $[-2, +\infty)$)

c. $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x+1}$ (Sol: $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$)

d. $y = \ln(x^2 - 4x + 3)$ (Sol: $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$)

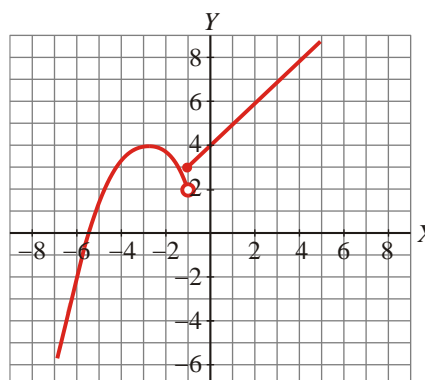
28. Siendo $f(x) = 8 - 2x$ y $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

- a) Halla el dominio de f y g [Dom $f = \mathbb{R}$, Dom $g = [-1/2, +\infty)$
 b) Halla $g \circ f$ y $f \circ g$ $[(g \circ f)(x) = \sqrt{17 - 4x}$, $(f \circ g) = 8 - 2\sqrt{1 + 2x}$]
 c) Calcula la función inversa: g^{-1} . [Sol: $y = \frac{x^2 - 1}{2}$]
 d) Puntos de corte con los ejes de la función $g(x)$

FUNCIONES. CONTINUIDAD Y LÍMITES

29. A partir de la gráfica de $f(x)$, calcula

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$
 e) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$



[Sol: a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2 d) 3 e) 0

30. Calcula los siguientes límites:

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{-5x - 2x^3}$ [Sol: $-1/2$]
 b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$ [Sol: 0]
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 8}{2x^2 - 5}$ [Sol: $1/2$]
 d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x + 1}{\sqrt{x^6 + 1}}$ [Sol: 0]
 e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x}{x - 1}$ [No existe]
 f. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}$ [Sol: -2]
 g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4})$ [Sol: 0]
 h. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 + x^2 - 2x}$ [Sol: 2]
 i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}$ [Sol: $13/7$]
 j. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$ [Sol: 8]
 k. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} - \frac{x^4 + x + 1}{x^3 + x} \right)$ [Sol: 0]
 l. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x)$ [Sol: $1/4$]
 m. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x}{\sqrt{1 + x^2}}$ [Sol: 2]

31. Estudia la continuidad de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ [Sol: es continua en \mathbb{R}]

32. Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 15 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ [Sol: es continua en \mathbb{R}]

33. Estudia la **continuidad** de la siguiente función definida a trozos, e indica el tipo de discontinuidad en cada caso :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+4} & \text{si } x \leq -1 \\ \sqrt{3-x} & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ \ln(x-2) & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

34. Dada la función $f(x) = \frac{4-2x^2}{x}$ se pide:

- Asíntotas. (Sol: A. horizontal $x = 0$, asíntota oblicua $y = -2x$)
- Puntos de corte con los ejes. (Sol: al eje X en $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, no corta al eje Y).
- Simetrías de la curva $y = f(x)$ (Sol: es simétrica respecto del origen de coordenadas).

35. Halla las asíntotas de la función: $y = \frac{3x^2+1}{x-2}$

36. Calcula las funciones derivadas y simplifica cuando se pueda:

- $f(x) = -x^7 + \frac{3}{4}x - 1$ (Sol: $f'(x) = -7x^6 + \frac{3}{4}$)
- $y = (x^2 + 2x)^3$ (Sol: $y' = 6x^5 + 30x^4 + 48x^3 + 24x^2$)
- $f(x) = e^{7x^4-3}$ (Sol: $f'(x) = 28x^3 \cdot e^{7x^4-3}$)
- $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ (Sol: $y' = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$)
- $y = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ (Sol: $y' = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$)
- $y = \cos x^4$ (Sol: $y' = -\sin x^4 \cdot 4x^3$)
- $y = \sin^3 x$; (Sol: $y' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$)
- $y = \sqrt{4x^3+1}$ (Sol: $y' = \frac{6x^2}{\sqrt{4x^3+1}}$)
- $y = \ln(3x^4 - 2x)$ (Sol: $y' = \frac{12x^3 - 2}{3x^4 - 2x}$)
- $y = e^{7x} \cdot \sin^3 x$ (Sol: $y' = e^{7x} \cdot (7 \cdot \sin^3 x + 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x)$)
- $y = (4x^2 - 2)\sqrt{4x-2}$ (Sol: $y' = \frac{40x^2 - 16x - 4}{\sqrt{4x-2}}$)
- $y = \sin\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$ (Sol: $y' = \frac{-5}{(2x-3)^2} \cdot \cos\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)$)
- $y = \ln(x^2 + 3x)^3$ (Sol: $y' = \frac{3(2x+3)}{x^2+3x}$)
- $y = (\cos x)^{x^2+5}$ (Sol: $y' = (\cos x)^{x^2+5} \cdot (2x \cdot \ln(\cos x) - (x^2+5) \cdot \tan x)$)

37. Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en el punto $x = 2$. (Sol: $y - 3 = -2(x - 2)$)
38. Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$. (Sol: $y = 7x - 4$)
39. Estudia la monotonía (máximos, mínimos, e intervalos de crecimiento) de la siguiente función:

$$f(x) = x^3 - 9x$$

40. Estudia la monotonía (máximos, mínimos, e intervalos de crecimiento) de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$$

Soluciones

- Crecimiento : $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$
- Decrecimiento: $(0, 2) \cup (2, \infty)$
- Tenemos un mínimo en $(0, \frac{-1}{4})$;

41. Halla las **asíntotas** , estudia la **monotonía** de la siguiente función y realiza la gráfica aproximada de la misma.

$$f(x) = \frac{x^2}{-x+2}$$

- Sol:
- Crecimiento : $(0, 2) \cup (2, 4)$
 - Decrecimiento: $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$
 - Tenemos un mínimo en $(0, 0)$

